Lycée de Matam | Année 2007/2008
TS1 | M.NDOYE

Série d'exercices : Calcul barycentriqueExercice 1

Démontrer deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont même centre de gravité si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}\,.$$

Est-ce le cas lorsque les points A', B', C' et D sont les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC?

Exercice 2

1) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de points M du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées, dans un repère de $\mathcal{P}$, vérifient $y \quad x^2$. $A_1(a_1, b_1)$ et $A_1(a_2, b_2)$ étant deux points de $\mathcal{E}$, on considère le barycentre G de ces points affectés des coefficients λ et $1-\lambda$, avec $0 \le \lambda \le 1$. Calculer les coordonnées (X, Y) de G et montrer que $G \in \mathcal{E}$.
2) .
   a) Etablir par récurrence sans nouveau calcul que, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartiennent à $\mathcal{E}$, leur isobarycentre appartient à $\mathcal{E}$.
   b) On considère le cas où les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'abscisses $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont sur la courbe d'équation $y = x^2$. Déduire de a) l'inégalité suivante :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\ .$$

Exercice 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle équilatéral ABC. On pose :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = a,\ a > 0.$$

1) Déterminer le barycentre G du système (A, 2), (B,1), (C, 1).
2) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan qui vérifient :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2$$

3) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan qui vérifient :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}$$

Exercice 4

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle rectangle ABC, d'hypoténuse $[BC]$ de longueur 2a. Soit f l'application :

$$M \mapsto \overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC},\ m \in$$

1) Déterminer m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ soit un vecteur constant $\overrightarrow{v_0}$ et calculer $\overrightarrow{v_0}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) On prend $m = -1$. Démontrer que le barycentre G du système (A, 4), (B,-1), (C, -1) est symétrique par rapport à A du milieu I de $[BC]$.
3) Déterminer l'ensemble :

$$C = \left\{ M \in P \,/\, 4\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = -4a^2 \right\}$$

.

(On remarquera que $A \in C$)

Exercice 5

Soit, dans le plan $\mathcal{P}$, un carré de coté de longueur c. on considère un réel α et f_α l'application du plan dans lui-même :

$f_\alpha : P \to P$
$M \mapsto M'$,telle que :

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}\,.$$

1) Déterminer, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de f_α.
2) Déterminer, puis construire, l'ensemble E1 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2\,.$$
3) Déterminer, puis construire, l'ensemble E2 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$$
4) Déterminer, puis construire, l'ensemble E2 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :
$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2c^2$$

Exercice 6

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne un triangle équilatéral ABC tel que AB = 1. Soit A' le milieu du segment $[BC]$.

1) Montrer que le milieu G du segment $[AA']$ est le barycentre de A, B, C respectivement affectés des coefficients 2, 1, 1.
2) Soit h l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M de $\mathcal{P}$, associe le point M' de $\mathcal{P}$ tel que :
$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3)

Exercice 7

1. Soit O, A, B et C quatre points non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$. On désigne par $\mathcal{R}$ le repère cartésien $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, et on rapporte $\mathcal{E}$ à ce repère.
   1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). Déterminer une équation cartésienne du plan π parallèle à (ABC) et passant par O.
   2) Soit k un réel. Caractériser géométriquement l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) vérifient : $x + y + z = k$.
   3) Soit $\vec{V}$ un vecteur non nul, de coordonnées (a, b, c) dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
   a) Décrire l'ensemble Δ des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées sont de la forme $(1 + \alpha a, \alpha b, \alpha c)$, où α est un réel quelconque.

b) Montrer que Δ est inclus dans le plan (ABC) si et seulement si l'on a : $a + b + c = 0$

II. On désigne par $\mathcal{E}'$ l'ensemble $\mathcal{E}\backslash\pi$.

1) Soit M un point de l'ensemble $\mathcal{E}'$, de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$. On lui associe le barycentre M' du système $\{(O, x), (A, y), (B, z)\}$. Montrer que l'on définit ainsi une application de f de l'ensemble $\mathcal{E}'$dans le plan (OAB).

2) .

a) On désigne par G l'isobarycentre de $\{O, A, B\}$ Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}'$tels que :f(M) = G.

b) Soit N un point du plan (OAB). Montrer qu'il existe un unique point M_1 appartenant au plan (ABC) et tel que :
$f(M_1) = N$. Montrer que l'ensemble des antécédents de N est la droite (OM_1) privée du point O. Déterminer f($\mathcal{E}'$).

c) Soit π'un plan strictement parallèle à π. Montrer que l'application f détermine une bijection de **π'** sur le plan (OAB).

3) ..

a) On désigne par K le milieu de $[AB]$ et par L la droite $(K, \overrightarrow{OC})$. Déterminer l'ensemble f(L∩ $\mathcal{E}'$). cet ensemble est-t-il une droite ?

b) Soit D une droite incluse dans le plan (ABC). Montrer que f(D) est une droite.

III. On se propose de déterminer géométriquement l'image M' d'un point M par f.

1) Soit P un point de la droite (AB). Montrer que P' appartient à la droite (OA). Donner une construction géométrique du point P'. Faire une figure dans le plan (OAB).

2) Soit Q un point de la droite (BC). Montrer que Q' appartient à la droite (AB). Donner une construction géométrique du point Q'. Faire une figure dans le plan (ABC).

3) Soit M_1 un point du plan (ABC). Donner une construction du point M_1'. Donner ensuite une construction de l'image M' d'un point M quelconque de $\mathcal{E}'$.